

## 2023-2024 Ուսումնական տարվա Մաթեմատիկայի մրցույթ-մարաթոն

### Առաջադրանք 4-5

1. Ապացուցել.

$$\text{ա) } \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) > \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N}$$

$$\text{բ) } \left(1 + \frac{1}{1 \cdot 3}\right)\left(1 + \frac{1}{2 \cdot 4}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right) < 2, n \in \mathbb{N}$$

2.  $a$  ամբողջ թիվը 5-ի բաժանելիս տալիս է 2 մնացորդը : Ի՞նչ մնացորդ կստացվի  $(a^2+a-6)$ -ը 25-ի բաժանելիս:

3. Ապացուցել.

ա) Երկու հաջորդական բնական թվերի արտադրյալը չի կարող լինել լրիվ քառակուսի.

բ) Երեք հաջորդական բնական թվերի արտադրյալը չի կարող լինել լրիվ քառակուսի.

գ) Եթե չորս հաջորդական բնական թվերի արտադրյալին ավելացնենք մեկ, ապա կստացվի լրիվ քառակուսի:

4. ա) Ի՞նչ մնացորդ կստացվի ամբողջ թվի քառակուսին 3-ի և 4-ի բաժանելիս:

բ) Ուղանկյուն եռանկյան կողմերի երկարությունները ամբողջ թվեր են: Ապացուցել, որ այդ թվերից առնվազն մեկը բաժանվում է 3-ի և առնվազն մեկը բաժանվում է 4-ի:

5. Հարթության վրա պատկերել այն կետերի բազմությունը, որոնց  $(x;y)$  կորդինատները բավարարում են հետևյալ առնչությանը.

$$\text{ա) } |x| + |y| = 2$$

$$\text{բ) } |x-2| + |y-2| = 2$$

$$\text{գ) } |x| + x + |y| + y = 2$$

$$\text{դ) } \frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} = 2$$

$$\text{ե) } (x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 = 4$$

$$\text{զ) } (|x|-1)^2 + y^2 = 4$$

6. Լուծել համակարգը.

$$\text{ա) } \begin{cases} x + y + xy = 1, \\ y + z + yz = 5, \\ z + x + zx = 2. \end{cases}$$

$$\text{բ) } \begin{cases} x(y + z) = 20, \\ y(z + x) = 18, \\ z(x + y) = 14. \end{cases}$$

7. Ապացուցել հետևյալ առնչությունները եռանկյան տարրերի միջև.

$$\text{ա) } \angle C = 90^\circ, n > 2, c^n > a^n + b^n,$$

$$\text{բ) } \angle C = 90^\circ, 2r_c = a + b + c,$$

$$\text{գ) } 1 < \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + \frac{r}{R} \leq 1,5$$

$$\text{դ) } \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{4R} \leq \frac{1}{8}:$$

8. Դպրոցի շախմատի մրցաշարին մասնակցում էին երկու 12-րդ դասարանցի և որոշ թվով 11-րդ դասարանցիներ: 12-րդ դասարանցիները միասին հավաքեցին 8 միավոր, իսկ 11-րդ դասարանցիները՝ հավասար թվով միավորներ : Քանի՞ 11-րդ դասարանցի էր մասնակցում մրցաշարին:

9. Ուղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգը ներգծված շրջանագծի հետ շոշափման կետով տրոհում է  $m$  և  $n$  երկարությամբ հատվածների : Ապացուցեք որ եռանկյան մակերեսը հավասար է  $mn$ :

10. Երկու շառավղով շրջանագիծը մեկ այլ շրջանագծի հետ ունի արտաքին շոշափում և  $AB$ -ն նրանց արտաքին ընդհանուր շոշափողն է ( $A$ -ն և  $B$ -ն շոշափման կետերն են), իսկ  $AC$ -ն առաջին շրջանագծի տրամագիծն է: Ապացուցեք, որ  $C$  կետից մյուս շրջանագծին տարած շոշափողի երկարությունը  $2r$  է:

11. ա) Արամը գնաց զբոսանքի, երբ ժամը 8-ի և 9-ի միջև ժամացույցի սլաքները համընկել էին և վերադարձավ ժամը 2-ի և 3-ի միջև, երբ ժամացույցի սլաքները կազմել էին փոփած անկյուն: Ինչքա՞ն տևեց Արամի զբոսանքը:

բ)  $y = x^2 + ax + b$  ֆունկցիայի գրաֆիկը կորդինատային առանցքները հատում է երեք տարբեր  $A$ ,  $B$  և  $C$  կետերում:  $ABC$  եռանկյանը արտագծած շրջանագծի կենտրոնը գտնվում է  $y = x$  ուղղի վրա: Ապացուցել, որ  $a + b = -1$ :

12.  $a$ -ի  $n$ -րդ արժեքների դեպքում՝

ա)  $2^{a+1}x^2 - x^4 = y^2 - 2\sqrt{a}y + 6$  հավասարումն ունի միակ լուծում,

բ)  $\begin{cases} 1 - \sqrt{|x-1|} = \sqrt{7|y|} \\ 49y^2 + x^2 + 4a = 2x - 1 \end{cases}$  համակարգն ունի 4 լուծում: