

2023-2024 Ուսումնական տարվա Մաթեմատիկայի մրցույթ-մարաթոն

Առաջադրանք 3

1. Պարզեցնել արտահայտությունը. $\sqrt{\sqrt{6} + 2\sqrt{3} + \sqrt{2} + \frac{9}{2}}$:
2. Ապացուցել, որ 3-ից մեծ բոլոր պարզ թվերի քառակուսին 24-ի բաժանելիս տալիս է 1 մնացորդ:
3. Ապացուցել, որ $n^3 + 5n + 13^n + 5$ բազմանդամը կամայական $n \in \mathbb{N}$ բնական թվի դեպքում բաժանվում է 3-ի:
4. Ապացուցել, որ \overline{abcabc} վեցանիշ թիվը բաժանվում է միաժամանակ 7-ի 11-ի և 13-ի:
5. Լուծել հավասարումը.
ա) $4\sqrt{2}x^3 - 22x^2 + 17\sqrt{2}x - 6 = 0$, բ) $\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}$:
6. Ապացուցել անհավասարությունը.
ա) $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$, եթե $a + b \geq 1$, ապա $a > 0$, $b > 0$,
բ) $\frac{a^3+b^6}{2} \geq 3ab^2 - 4$, որտեղ $a \geq 0$:
7. Գտնել 2-ից մեծ թվանշաններով կազմված բոլոր այն քառանիշ թվերի քանակը, որոնցից յուրաքանչյուրի թվանշանները դասավորված են՝ ա) ձախից աջ աճման կարգով, բ) ձախից աջ նվազման կարգով:
8. Գտնել այն A բնական թիվը, որի համար տրված երեք պնդումներից երկուսը ճիշտ են, իսկ մեկը սխալ՝
ա) $A + 51$ լրիվ քառակուսի է:
բ) A թվի վերջին թվանշանը 1 է:
գ) $A - 38$ լրիվ քառակուսի է:
9. CC_1 -ը ABC սուրանկյուն եռանկյան բարձրությունն է, H -ը՝ օրթոկենտրոնը: Ապացուցել, որ $CC_1 \cdot HC_1 = AC_1 \cdot C_1B$:
10. Շրջանագծի մեջ նրա AB տրամագծի ծայրակետերից տարված են երկու AD և BC լարեր, որոնք հատվում են E կետում: Ապացուցել, որ $AD \cdot AE + BC \cdot BE = AB^2$:
11. ա) Ապացուցել, որ $\sin 10^\circ$ իռացիոնալ թիվ է:
բ) Առանց աղյուսակի հաշվել $6\cos 40^\circ - 8\cos^3 40^\circ$:
12. ա) Ապացուցել, որ $x^2 + 5x + 16$ քառակուսային եռանդամը x -ի ոչ մի ամբողջ արժեքի դեպքում չի բաժանվի 169-ի:
բ) Գտնել $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy - z^2 = 1 \end{cases}$ համակարգի իրական լուծումները: